

Tipos de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Triangular
superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Triangular
inferior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonal

Todos iguales

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Escalar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identidad

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nula

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Simétrica

Cambios de signo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Antisimétrica

Ceros

Trasposición cambiamos filas por columnas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 9 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Inversión por gauss $(A|I) \Rightarrow (I|A^{-1})$

Permutar filas

Multiplicar una fila por un número

Sumar a una fila una combinación de otras

Inversión por adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^T)$$

Rango de una matriz

◆ Es el número de filas o columnas linealmente independientes

◆ Coincide con el orden del mayor determinante de sus submatrices que sea no nulo.

◆ Para calcularlo, hacemos ceros por debajo de la diagonal principal (con gauss) y contamos el número de filas no nulas

Determinantes

Orden 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Orden 3: Regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - (gec + dbi + fha)$$

Orden 4 o más: desarrollamos por adjuntos

Determinante por adjuntos

El determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (cualquiera) por sus adjuntos

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

⚠ Cuidado con los signos de los adjuntos: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Propiedades de los determinantes

◆ $|A^T| = |A|$ ◆ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ◆ $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

◆ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \rightarrow |A^n| = |A|^n$

◆ Si las filas o columnas son linealmente dependientes el determinante es cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 = 2F_1} 0$$

◆ Si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las demás, el determinante no cambia

Sistemas de ecuaciones

$$A \cdot X = B$$

A: matriz de coeficientes
X: matriz de incógnitas
B: matriz de términos indep.
A* = (A|B): matriz ampliada
n: número de incógnitas

Teorema de Rouché-Fröbenius

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = n \rightarrow$ sistema compatible determinado (SCD) $\rightarrow$ solución única

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) < n \rightarrow$ sistema compatible indeterminado (SCI) $\rightarrow \infty$ soluciones

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A^*) \rightarrow$ sistema incompatible $\rightarrow$ No hay solución

Si quieres más contenido como éste escanea el QR



Resolución de sistemas

Primera forma: Escalonamos el sistema con Gauss y resolvemos

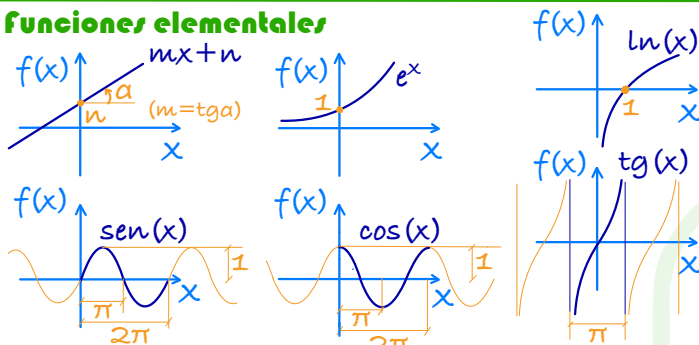
Segunda forma: Si el sistema es SCD: $A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Tercera forma (Cramer):

Si el sistema es SCD con $n=3$ y llamamos C_1 , C_2 y C_3 a las columnas de A, $A = (C_1 \ C_2 \ C_3)$, entonces:

$$x = \frac{|B \ C_2 \ C_3|}{|A|}, y = \frac{|C_1 \ B \ C_3|}{|A|}, z = \frac{|C_1 \ C_2 \ B|}{|A|}$$

Funciones elementales

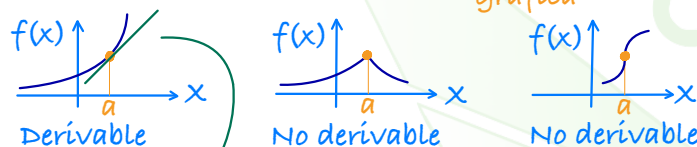


Derivación

f derivable en a si existe y es finito el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica



Recta tangente:

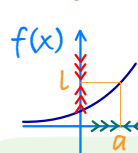
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Propiedad: derivable $\rightarrow$ continua

Gráfica de una función. Proceso

1. Dominio
2. Simetrías
3. Continuidad
4. Asíntotas
5. Monotonía
6. Curvatura
7. Corte con ejes

Límites



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Cuando x se acerca mucho a a , las imágenes se acercan mucho a l

$0/0$: factorizar o L'Hôpital

∞/∞ : órdenes de infinito o L'Hôpital

$0 \cdot \infty$: se pasa a $0/0$ o ∞/∞

$\infty - \infty$: x y y por la expresión conjugada

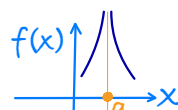
$$1^\infty: \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} h(x)(f(x)-1)}$$

$$\infty^0, 0^0: \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} h(x) \ln(f(x))}$$

indeterm.

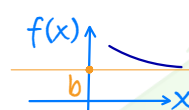
Gráfica de una función. Asíntotas.

Verticales



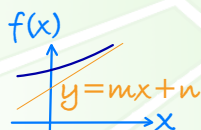
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

Horizontales



$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$$

Oblicuas



$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \pm \infty$$

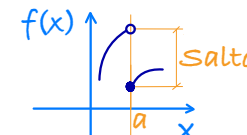
$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx) \neq \pm \infty$$

Continuidad Se puede dibujar la gráfica sin levantar el boli del papel

$$f \text{ es continua en } a \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

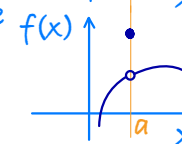
Discontinuidad esencial o inevitable

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



Discontinuidad evitable

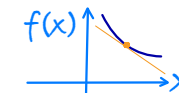
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$



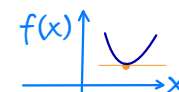
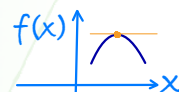
Gráfica de una función. Monotonía



Creciente $\leftrightarrow f' > 0$



Decreciente $\leftrightarrow f' < 0$



ojo cuidado $f' = 0 \rightarrow$ extremo

Máximo rel. $\rightarrow f' = 0$ Mínimo rel. $\rightarrow f' = 0$

Para calcular Extremos relativos, calculamos puntos críticos ($f' = 0$) y luego los clasificamos estudiando el signo de f' alrededor de cada punto crítico

Cálculo de primitivas

Inmediatas aplicamos la tabla

Partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \rightarrow \text{Cociente de polinomios}$$

Paso 1: si grado(numerador) $\geq$ grado(denominador) hacemos el cociente

Paso 2: calculamos las raíces del denominador $Q=0$. Pueden ser

Raíz real simple r

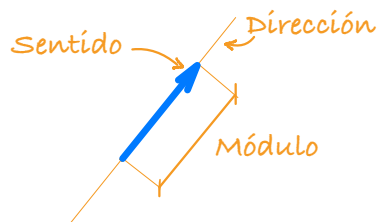
Raíz real múltiple r de multiplicidad n

Paso 3: descomponemos en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B_1}{x-r} + \frac{B_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x-r)^n}$$

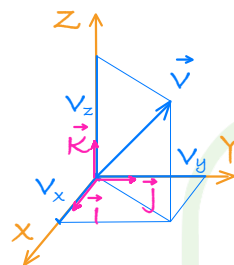
Paso 4: integramos cada una de las fracciones simples que son inmediatas

Definición



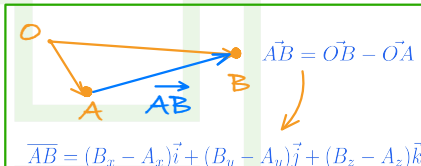
Componentes de un vector

Son las proyecciones del vector v en las direcciones i, j y k

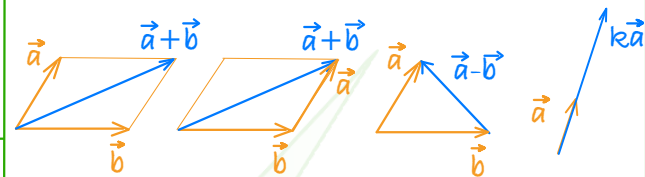


$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \leftrightarrow (v_x, v_y, v_z)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



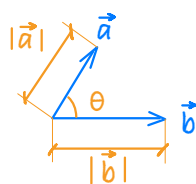
Operaciones. Suma y producto por escalar



$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$k\vec{a} = ka_x\vec{i} + ka_y\vec{j} + ka_z\vec{k}$$

Operaciones. Producto escalar



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

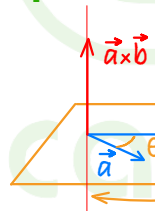
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \leftrightarrow \text{Ortogonales}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Operaciones. Producto vectorial

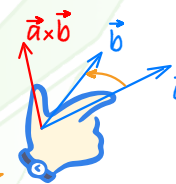
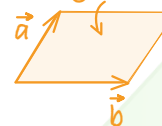
Área del paralelogramo



$$\text{Módulo: } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

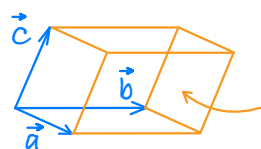
Dirección

Sentido: Regla de la mano derecha



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Operaciones. Producto mixto

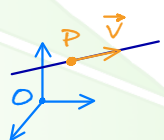


$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

En valor absoluto, es el volumen del paralelepípedo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ecuación Vectorial de una recta



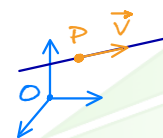
$$\vec{r}(t) = \vec{OP} + t\vec{v}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_P + t v_1 \\ y(t) = y_P + t v_2 \\ z(t) = z_P + t v_3 \end{cases}$$

Ecuación continua de una recta

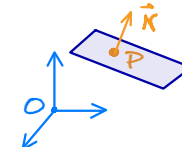


$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$\frac{x - x_P}{v_1} = \frac{y - y_P}{v_2} = \frac{z - z_P}{v_3}$$

Ecuación de un plano

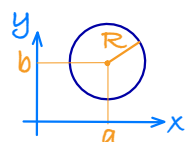


$$\vec{N} = (A, B, C)$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$A(x - x_P) + B(y - y_P) + C(z - z_P) = 0$$

Ecuación de una circunferencia en el plano



Centro: (a, b)

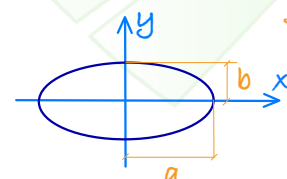
Radio: R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

También: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\begin{matrix} -2a & -2b & a^2 + b^2 - R^2 \end{matrix}$$

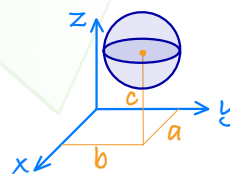
Ecuación de una elipse en el plano



Semi ejes: a y b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de una esfera en el espacio



Centro: (a, b, c)

Radio: R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Si quieres más contenido como éste escanea el QR



Derivadas

$$y = cte. \Rightarrow y' = 0$$

$$y = u^a \Rightarrow y' = au^{a-1}u'$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$$

$$y = a^u \Rightarrow y' = a^u u' \ln a$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y = u[v(x)] \Rightarrow y' = u'[v(x)]v'(x)$$

$$y = u^v \Rightarrow y' = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'$$

$$y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = u' (1 + \operatorname{tg}^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$y = \operatorname{arcsen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{arccos} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Integrales

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \operatorname{Sh} x dx = \operatorname{Ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{Ch} x dx = \operatorname{Sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = \begin{cases} -(1/a) \operatorname{Arg} \operatorname{Th}(x/a) + C, & \text{si } |x/a| < 1 \\ -(1/a) \operatorname{Arg} \operatorname{Cth}(x/a) + C, & \text{si } |x/a| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh}(x/a) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \operatorname{Arg} \operatorname{Ch}(x/a) + C, & \text{si } x > a > 0 \\ -\ln \left(-x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) = -\operatorname{Arg} \operatorname{Ch}(-x/a) + C, & \text{si } x < -a < 0 \end{cases}$$

Trigonometría

Ángulos importantes

ángulo	sen	cos	tan
0; 2π	0	1	0
π/6 ~ 30°	1/2	√3/2	1/√3
π/4 ~ 45°	√2/2	√2/2	1
π/3 ~ 60°	√3/2	1/2	√3
π/2 ~ 90°	1	0	∅
π ~ 180°	0	-1	0
3π/2 ~ 270°	-1	0	∅

Ángulos en otros cuadrantes:

$$\text{Cuadrante 2: } \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{Cuadrante 3: } \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{Cuadrante 4: } \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Otras fórmulas importantes:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$