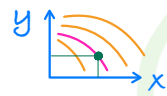


 www.academiacastineira.com 50 aniversario		Grado en ing. Aeroespacial Asignatura: Métodos matemáticos	Profesor Berardo Castiñeira	Cap. I: M. elementales
1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Grado de la EDO ◆ Ecuación: $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ ◆ Solución: $y = y(x)$ que cumpla la ecuación (hay ∞) ◆ Problema de Cauchy: EDO + Condición inicial ◆ EDO de orden 1: $y' = f(x, y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)} \rightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$		2. EDO primer orden 2.1. EDO primer orden. Variables separadas. ◆ Aspecto: $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ ◆ Solución: $P(x)dx = -Q(y)dy$ $\int P(x)dx = -\int Q(y)dy$ $y = y(x)$	2.2. EDO primer orden. Homogénea. ◆ Definición: $f(x, y)$ es homogénea de grado k si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ ◆ Ejemplo: $g(x, y) = x^3y + 5y^4$ es hom. Grado 4 $g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3(\lambda y) + 5(\lambda y)^4 = \lambda^4(x^3y + 5y^4) = \lambda^4 g(x, y)$ ◆ Aspecto: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (P y Q homogéneas del mismo grado) ◆ Solución: C.V. $y(x) = x \cdot y(x) \rightarrow$ v. separadas	
2.3. EDO primer orden. Exacta. ◆ Aspecto: $P(x, y) + Q(x, y)dy$ es exacta si $P'_y = Q'_x$ ◆ Propiedad: Exacta $\leftrightarrow$ Existe $\mu(x, y)$ tal que $d\mu = Pdx + Qdy$ ◆ Solución: $Pdx + Qdy = 0 \rightarrow d\mu = 0 \rightarrow \mu(x, y) = K$ ◆ Cálculo de μ: $d\mu = Pdx + Qdy \rightarrow \begin{cases} \mu'_x = P \xrightarrow{\int_x} \mu = \dots \\ \mu'_y = Q \xrightarrow{\int_y} \mu = \dots \end{cases}$	2.4. EDO primer orden. Factor integrante ◆ Definición: $\zeta(x, y)$ es factor integrante de $Pdx + Qdy = 0$ si $\zeta \cdot Pdx + \zeta \cdot Qdy = 0$ es dif. exacta ◆ F. Integrantes "famosos": Si $(P'_y - Q'_x)/Q = f(x)$ hay f. Integrante $\xi(x) = e^{\int f(x)dx}$ Si $(P'_y - Q'_x)/P = g(y)$ hay f. Integrante $\xi(y) = e^{\int g(y)dy}$	2.5. EDO primer orden. lineal de primer orden. ◆ Aspecto: $y' + a(x)y = b(x)$ ◆ Solución: $y_{qc} = y_{qH} + y_{pc}$ <u>y_{qH}: Sol. General de la ec. Homogénea</u> $y' + a(x)y = 0 \rightarrow$ v. Separadas $\rightarrow y_{qH} = K e^{-\int a(x)dx}$ <u>y_{pc}: Sol. Particular de la ec. Completa</u> Método de variación de las constantes: buscamos una solución de la forma $y = K(x)e^{-\int a(x)dx}$ Donde $K(x)$ Es una función desconocida que se obtiene obligando a que se cumpla la EDO completa		
2.6. EDO primer orden. Ecuación de Bernouilli ◆ Aspecto: $y' + a(x)y = b(x)y^n$ ◆ Solución: 1. Dividimos entre y^n $\frac{y'}{y^n} + a(x) \frac{1}{y^{n-1}} = b(x)$2. C. de variable $v = \frac{1}{y^{n-1}} \rightarrow$ Lineal Primer orden	3. EDO orden n 3.1. EDO orden n. lineal de coeficientes constantes ◆ Aspecto: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$ ◆ Solución: $y_{qc} = y_{qH} + y_{pc}$ constantes <u>y_{qH}: Sol. General de la ec. Homogénea</u> $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ 1. Resolvemos la ecuación característica $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ Obtenemos λ_i y sus multiplicidades m_i 2. una base del espacio de soluciones es $\{x^k e^{\lambda_i x}; \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad k = 0, 1, \dots, m_i - 1\}$	3. Ejemplo. Si $n=6$ y obtenemos $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \text{ triple} \\ \lambda_2 = 4 \text{ doble} \\ \lambda_3 = 2 \text{ simple} \end{cases}$ una base es $\{e^{5x}, x e^{5x}, x^2 e^{5x}, e^{4x}, x e^{4x}, e^{2x}\}$ Y la solución de la ecuación homogénea es $y_{GH} = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + C_3 x^2 e^{5x} + C_4 e^{4x} + C_5 x e^{4x} + C_6 e^{2x}$		
2.7. EDO primer orden. Ecuación de Ricatti ◆ Aspecto: $y' + a(x)y = b(x)y^2 + c(x)$ Sol. Particular ◆ Solución: c.v. $v(x) = y(x) - y_0(x) \rightarrow$ Bernouilli	Si hay soluciones complejas $\alpha \pm \beta i$, en lugar de usar la base $\{e^{(\alpha + \beta i)x}, e^{(\alpha - \beta i)x}\}$ usamos $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)\}$			

3.1. EDO orden n. lineal de coeficientes constantes (continuación)

y_{PC} : Sol. Particular de la ec. Completa $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$

Método de variación de las constantes:

Si la sol. de la homogénea es $y = C_1E_1 + \dots + C_nE_n$

Buscamos una solución de la forma $y = C_1(x)E_1 + \dots + C_n(x)E_n$

Donde $C_1(x), \dots, C_n(x)$ son funciones que se obtienen resolviendo:

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_n \\ E_1' & E_2' & \dots & E_n' \\ E_1'' & E_2'' & \dots & E_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^{(n-1)} & E_2^{(n-1)} & \dots & E_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

3.2. Orden n. Ecuación de Euler.

Es lineal de segundo
orden pero no de
coeficientes constantes

◆ Aspecto: $x^2 y'' + ax y' + \beta y = b(x)$

◆ Solución: c. De variable de la variable independiente

$$x = e^S \leftrightarrow S = \ln x$$

Hay que cambiar las derivadas respecto de x , y' e y'' , por derivadas respecto de S , $\dot{y}$ e $\ddot{y}$, usando la regla de la cadena

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x} \dot{y}$$

$$y'' = \dots = \frac{1}{x^2} (\ddot{y} - \dot{y})$$

De memoria

◆ Tras el cambio queda una EDO lineal de segundo orden y coeficientes constantes

Método de los coeficientes indeterminados

Buscamos una sol. que sea comb. lineal del término independiente $b(x)$ y sus derivadas

◆ Si $b(x) = \sin(px)$ o $b(x) = \cos(px)$: $y = A \sin(px) + B \cos(px)$

◆ Si $b(x) = e^{px}$: $y = A e^{px}$

◆ Si $b(x) = p(x)$ (Pol. Grado n): $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$

◆ Combinaciones: Si $b(x)$ es combinación o producto de los anteriores, buscamos una solución que sea combinación o producto de las anteriores

◆ Repeticiones: Si algún término de la solución particular propuesta, E , ya aparece en la solución homogénea (asociado a λ de multiplicidad m), se debe multiplicar la solución particular propuesta por x^m

Ejemplo: $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$

y_{GH} $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \rightarrow \lambda = 5$ doble $\rightarrow$ Base: $\{e^{5x}, xe^{5x}\} \rightarrow y_{GH} = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

y_{PC} Como $b(x) = e^{5x}$ busco solución de la forma $y = A e^{5x}$

Pero e^{5x} forma parte de la solución homogénea asociado a $\lambda = 5$ doble. Por tanto, buscamos una solución de la forma $y = A x^2 e^{5x}$