

# Espacios vectoriales

## 1 Espacios vectoriales.

**Definición** Sea  $V$  un conjunto dotado de una operación interna “+” que llamaremos **suma**, y sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo conmutativo que define sobre  $V$  una operación externa “ $\cdot$ ”, que llamaremos **producto por escalares**.

$$\alpha \cdot \vec{a} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \vec{a} \in V$$

Diremos que  $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$  es un **espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$** , respecto de las operaciones **suma** y **producto por escalares** si se verifican las siguientes condiciones:

1.  $(V, +)$  es un grupo conmutativo.
2. El producto por escalares cumple las siguientes propiedades:

$$2.1 \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in V$$

$$2.2 \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{a} \in V$$

$$2.3 \quad \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\alpha \cdot \vec{b}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$$

$$2.4 \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot \vec{a}) + (\beta \cdot \vec{a}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{a} \in V$$

Los elementos de  $V$  se denominan **vectores** y los de  $\mathbb{K}$  **escalares**.

Aunque son operaciones distintas la suma de vectores y la de escalares, por comodidad se representan por el mismo signo. Igualmente omitimos el  $(\cdot)$  del producto interno en  $\mathbb{K}$ . Cuando  $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ , el espacio vectorial se llama **real**.

### Propiedades.-

1.  $\forall \vec{a} \in V : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .
3.  $\forall \vec{a} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} : -(\alpha \cdot \vec{a}) = (-\alpha) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (-\vec{a})$ .
4.  $\forall \vec{a} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ó } \vec{a} = \vec{0}$ .

**Definición (Subespacio vectorial)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y  $F$  una parte no vacía de  $V$ , se dice que  $F$  es **subespacio vectorial** de  $V$ , si las restricciones a  $F$  de las dos operaciones de  $V$ , dotan a  $F$  de una estructura de espacio vectorial, es decir si:

$$1. (F, +) \text{ es subgrupo de } (V, +) \quad (\forall \vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} \in F)$$

$$2. \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{a} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in F$$

**Teorema (Caracterización de subespacios vectoriales)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y sea  $F$  una parte no vacía de  $V$ .  $F$  es subespacio vectorial de  $V$  si y sólo si:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \in F$$

Obsérvese que:

- El vector nulo  $\vec{0}$  pertenece a todos los subespacios de un espacio  $V$ .
- Un espacio vectorial  $V$  tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto  $\{\vec{0}\}$ , formado sólo por el vector nulo, que se llamará **subespacio nulo**. El mismo espacio  $V$  es un subespacio de sí mismo.

## Intersección y suma de subespacios

**Definición (Intersección de subespacios vectoriales)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial. Se define la **intersección**  $(\cap)$  de dos subespacios vectoriales  $U$  y  $W$  de  $V$ , como el subconjunto de  $V$  que verifica:

$$\vec{a} \in U \cap W \iff \vec{a} \in U \wedge \vec{a} \in W$$

**Teorema** La intersección de un número cualquiera de subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $V$  es, a su vez, un subespacio vectorial de  $V$ .

La unión de subespacios de un espacio vectorial  $V$ , en general no es un subespacio de  $V$ .

**Definición (Suma de subespacios)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  y sean  $U_1$  y  $U_2$  dos subespacios de  $V$ . Se llama **suma** de  $U_1$  y  $U_2$  al conjunto, que se denota  $U_1 + U_2$ :

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\}$$

**Teorema** El conjunto  $U_1 + U_2$  es un subespacio de  $V$ ; es más, se trata del menor de todos los subespacios que contienen a  $U_1$  y  $U_2$ .

**Definición (Suma directa)** Sean  $U_1$  y  $U_2$  subespacios de un espacio vectorial  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  y sea  $L \subseteq V$ ,  $U_1 + U_2$  es **suma directa** de  $L$ , lo que se denota poniendo  $U_1 \oplus U_2 = L$ , si se verifica que  $U_1 + U_2 = L$  y  $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

Si  $L = V$  a los subespacios  $U_1, U_2$  se les denominan **subespacios suplementarios**.

## 2 Dependencia e independencia lineal

### Combinación lineal. Subespacio generado por un conjunto de vectores

**Definición (Combinación lineal)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial. Se llama **combinación lineal** de los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in V$  a todo vector  $\vec{x}$  de  $V$  de la forma:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p, \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}.$$

**Definición (Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores)** Consideremos  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y sea  $H = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$ .

El subconjunto  $\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p / \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$  se denomina **variedad lineal generada por el conjunto H**. Se suele escribir  $L(H)$  o  $\langle H \rangle$ .

Se demuestra fácilmente que  $L(H)$  es un subespacio vectorial de  $V$  que recibe el nombre de subespacio vectorial **generado** (o engendrado) por  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ .

### Independencia lineal. Sistema de generadores

**Definición (Dependencia lineal)** Sea  $H = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  un sistema de vectores de un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

- Se dice que  $H$  es un sistema **linealmente independiente** o sistema **libre**, si la única combinación lineal de ellos que vale  $\vec{0}$  es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es, si

$$\forall \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

- Se dice que  $H$  es un sistema **linealmente dependiente** o sistema **ligado** si no es un sistema libre, esto es, si existen algunos escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , no todos nulos tales que  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}$ . Se dice que un vector **depende linealmente** de otros si es combinación lineal de éstos.

### Propiedades

- El vector  $\vec{0}$  es combinación lineal de cualquier familia de vectores. Por tanto, si un sistema contiene al vector nulo, entonces el sistema es ligado.
- Un sistema de vectores es ligado si y sólo si alguno de sus vectores depende linealmente de los demás. Por tanto, si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , entonces el sistema  $S = \{\vec{u}\}$  es libre. Un sistema  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ , formado por dos vectores, es ligado si y sólo si uno de ellos es proporcional al otro.
- Si un sistema  $S$  de vectores es libre, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de  $S$ .
- Si un sistema  $S$  de vectores es ligado, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de añadir algún vector a  $S$ .

**Definición (Sistema de generadores de un espacio o subespacio vectorial)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y  $L \subseteq V$  un subespacio vectorial. Se dice que los vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $L$  son un **sistema de generadores** del subespacio vectorial  $L$ , si y sólo si, todo vector de  $L$  es combinación lineal de  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ .

**Teorema (Teorema Fundamental de la independencia lineal)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y  $L \subseteq V$  un subespacio vectorial que está generado por un cierto sistema  $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ . Si  $I = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_h\}$  es un sistema libre de vectores de  $L$  entonces se verifica que  $h \leq p$ .

### 3 Base y dimensión

**Definición (Base de un espacio o subespacio vectorial)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial y  $L$  un subespacio vectorial de  $V$ . Diremos que el sistema  $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} \subset L$  es una **base** de  $L$  si y sólo si verifica:

1. Forman un sistema de generadores de  $L$ .
2. Son linealmente independientes.

En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , los vectores:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

forman una base que se llama **base canónica** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema (Teorema de existencia de la Base)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial de tipo finito (es decir, generado por un número finito de vectores) y sea  $L \subseteq V$ ,  $L \neq \{\vec{0}\}$  subespacio vectorial. Cualquier sistema generador de  $L$  incluye una base. En consecuencia, todo subespacio vectorial de tipo finito posee alguna base.

**Teorema (Teorema de la dimensión)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial de tipo finito y  $L$  un subespacio vectorial de  $V$ . Todas las bases de  $L$  tienen igual número de vectores. A este número se le llama **dimensión** del subespacio  $L$  y se representa por  $\dim(L)$ .

Se conviene en que el espacio  $\{\vec{0}\}$  tiene dimensión 0.

**Teorema** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial de tipo finito y  $L$  un subespacio vectorial de  $V$ . Si  $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  es un sistema de vectores de  $L$ , entonces se verifica que:

1. Si  $S$  es un sistema generador de  $L$ , entonces  $p \geq \dim(L)$ .
2. Si  $S$  es un sistema libre, entonces  $p \leq \dim(L)$ .
3. Si  $S$  es generador de  $L$  y  $\dim(L) = p$ , entonces  $S$  es base de  $L$ .
4. Si  $S$  es libre y  $\dim(L) = p$ , entonces  $S$  es base de  $L$ .

Por tanto, la dimensión de un subespacio vectorial  $L$  es el número máximo de vectores de  $L$  linealmente independientes. Además, la dimensión de  $L$  es el número mínimo de vectores de un sistema generador de  $L$ .

**Teorema (Teorema de la base incompleta)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  una base de  $V$  y el conjunto  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  un sistema libre de vectores de  $V$ , donde  $p < n$ . Entonces existe algún sistema  $S'$  de  $n - p$  vectores de  $V$ , tal que  $S \cup S'$  sea una base de  $V$ . Es más, los vectores de  $S'$  se pueden tomar de entre los de una base cualquiera  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $V$ .

**Teorema (Fórmula de Grassmann)** Si  $U_1$  y  $U_2$  son dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, se verifica:

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

## Coordenadas de un vector. Unicidad

Lo que hace del concepto de base algo realmente útil es que, recurriendo a ellas, cualquier vector queda identificado mediante los coeficientes de la única combinación lineal que lo expresa en función de los vectores de la base. A estos coeficientes se les llama coordenadas. En un espacio vectorial de dimensión finita, si se dispone de una base, conocer un vector viene a ser lo mismo que conocer sus coordenadas.

**Teorema (Unicidad de la expresión de un vector en una base)** Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial. Todo vector de un subespacio vectorial  $L \subseteq V$ ,  $L \neq \{\vec{0}\}$  se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de una base de  $L$ .

**Definición** Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $L \subseteq V$ ,  $L \neq \{\vec{0}\}$  un subespacio vectorial de  $V$ . Dada una base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $L$ , (según el teorema anterior) para cada  $\vec{x} \in L$  existen unos únicos escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tales que  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ . Entonces se dice que la  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son las **coordenadas** del vector  $\vec{x}$  en la base  $\mathcal{B}$ .

## Rango de un conjunto finito de vectores

**Definición** Se llama **rango** de un sistema  $S$  con un número finito de vectores de un cierto espacio vectorial  $V$ , y se denota por  $rg(S)$ , a la **dimensión** del subespacio que engendra  $S$ .

Es decir  $rg(S) = \dim(L(S))$  = número máximo de vectores linealmente independientes que hay en  $S$  y, en consecuencia, la familia  $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  es libre si y sólo si su rango es igual al número  $p$  de vectores que lo forman.

Además, en un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ , un sistema de vectores es generador si y sólo si su rango es  $n$ .

## Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial

Sea  $(V, +, \cdot \mathbb{K})$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Consideremos una variedad lineal (o subespacio vectorial)  $U$  generado por los vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ . Sabemos que  $\vec{x} \in U$ , entonces  $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_k\vec{u}_k$ . Si cada vector lo referimos a la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $V$ , y desarrollando la expresión, obtendremos:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + \dots + \lambda_k u_{k1} \\ x_2 = \lambda_1 u_{12} + \lambda_2 u_{22} + \dots + \lambda_k u_{k2} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n} + \dots + \lambda_k u_{kn} \end{cases}$$

A las ecuaciones (1) se le llaman **ecuaciones paramétricas** de la variedad lineal  $U$ .

Eliminando parámetros en las ecuaciones (1), aplicando el método de Gauss y considerando como incógnitas los parámetros  $\lambda_i$  obtendremos  $n-k$  relaciones entre las componentes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que se llaman **ecuaciones implícitas** de  $U$ .

Se verifica la siguiente relación:

$$\text{Nº de ecuaciones implícitas linealmente independientes de } U = \dim V - \dim U.$$

## 4 Cambio de base en un espacio vectorial

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Hemos visto que cualquier vector  $\vec{x}$  queda determinado de manera única conociendo un sistema de coordenadas respecto de una base de  $V$ . Ahora bien, si elegimos otra base de  $V$ ,  $\vec{x}$  tendrá otras coordenadas distintas a las anteriores.

¿Qué relación guardan las coordenadas del vector respecto de ambas bases ?

Este problema se podrá resolver si se conocen las relaciones de dependencia entre los vectores de las dos bases, es decir, cuando se conozcan las coordenadas de los vectores de una base respecto de los de la otra.

Sean  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  bases de  $V$ . Supongamos que  $\vec{v}_j = a_{j1}\vec{u}_1 + a_{j2}\vec{u}_2 + \dots + a_{jn}\vec{u}_n = \sum_{i=1}^n a_{ji}\vec{u}_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ). En estas condiciones, cualquier vector  $\vec{x} \in V$  puede expresarse en una u otra base de la siguiente manera:

$$\text{En } \mathcal{B}, \quad \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^n x_i\vec{u}_i$$

$$\text{En } \mathcal{B}', \quad \vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + \dots + x'_n\vec{v}_n = \sum_{j=1}^n x'_j\vec{v}_j$$

donde  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son las coordenadas de  $\vec{x}$  en la base  $\mathcal{B}$  y  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  son las coordenadas de  $\vec{x}$  en la base  $\mathcal{B}'$ . En consecuencia:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n x'_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ji}\vec{u}_i \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}x'_j\vec{u}_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x'_ja_{ji} \right) \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n x_i\vec{u}_i$$

es decir:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}x'_j, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

que son las relaciones buscadas entre ambas coordenadas. Explícitamente:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{n1}x'_n \\ x_2 = a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{n2}x'_n \\ \vdots \\ x_n = a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n \end{cases}$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones del cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .