

VECTORES ALEATORIOS

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Nosotros estudiamos: (X, Y)

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

(X, Y) es un v.a. discreto:

FUNCIÓN DE MASA CONJUNTA

$$1. \sum_{(x,y) \in D_{(X,Y)}} p(x, y) = 1$$

$$2. p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

$$3. F(x, y) = \sum_{a \leq x} \sum_{b \leq y} p(a, b)$$

(X, Y) es un v.a. continuo:

FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA

$$1. \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$$

$$2. \text{ Si } B \subset \mathbb{R}^2 \text{ entonces } P(B) = \int_B f(x, y) dx dy$$

$$3. F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

FUNCIÓN DE MASA MARGINAL

$$p_X(x) = \sum_{y \in D_Y} p(x, y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in D_X} p(x, y)$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD MARGINAL

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

FUNCIÓN DE MASA CONDICIONADA

$$p_{X/Y=y_0}(x) = \frac{p(x, y_0)}{p_Y(y_0)} \quad X \text{ condicionada por } Y$$

$$p_{Y/X=x_0}(y) = \frac{p(x_0, y)}{p_X(x_0)} \quad Y \text{ condicionada por } X$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD CONDICIONADA

$$f_{X/Y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad X \text{ condicionada por } Y$$

$$f_{Y/X}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad Y \text{ condicionada por } X$$

MOMENTOS Y CARACTERÍSTICAS

$$E[g(X, Y)] = \sum_{(x,y) \in D_{(X,Y)}} g(x, y) \cdot p(x, y) \quad \text{si } (X, Y) \text{ es un v.a. discreto}$$

MOMENTO RESPECTO DEL ORIGEN:

$$\alpha_{k,l} = E[X^k Y^l]$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \cdot f(x, y) dx dy \quad \text{si } (X, Y) \text{ es un v.a. continuo}$$

MOMENTO RESPECTO DE LAS MEDIAS:

$$\beta_{k,l} = E[(X - \mu_X)^k (Y - \mu_Y)^l]$$

MEDIA

$$\mu_X = E[X] = \alpha_{1,0}$$

$$\mu_Y = E[Y] = \alpha_{0,1}$$

VARIANZA

$$\sigma_X^2 = V(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \beta_{2,0}$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = \beta_{0,2}$$

COVARIANZA

$$\sigma_{X,Y} = \text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \beta_{1,1}$$

VECTORES ALEATORIOS

PROPIEDADES

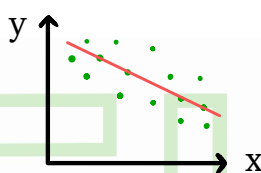
1. $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
2. $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$
3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$

RELACIÓN LINEAL ENTRE X E Y

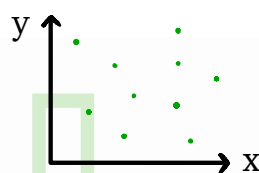
$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

¿Cómo se interpreta?

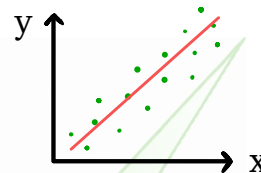
$\rho_{X,Y} \simeq -1$



$\rho_{X,Y} \simeq 0$



$\rho_{X,Y} \simeq 1$



INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

X e Y serán variables aleatorias independientes si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones

1. $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
2. $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ si (X, Y) es un vector aleatorio discreto.
3. $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ si (X, Y) es un vector aleatorio continuo.
4. $\sigma_{X,Y} = \text{cov}(X, Y) = 0$ o $\rho_{X,Y} = 0$.
5. $E[XY] = E[X]E[Y]$ o $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$

ESPERANZA CONDICIONADA

$$E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X/Y}(x) dx$$

$$E[Y/X] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(y) dy$$

CURVAS DE REGRESIÓN

$$x = g(y) = E[X/Y] \rightarrow \text{X sobre Y}$$

$$y = h(x) = E[Y/X] \rightarrow \text{Y sobre X}$$

TRANSFORMACIONES DE VECTORES ALEATORIOS

Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f(x, y)$. Sea la siguiente transformación biyectiva:

$$\begin{aligned} (X, Y) &= (h_1(U, V), h_2(U, V)) \\ (U, V) &= (g_1(X, Y), g_2(X, Y)) \end{aligned} \longrightarrow J = \begin{pmatrix} \partial h_1 / \partial u & \partial h_1 / \partial v \\ \partial h_2 / \partial u & \partial h_2 / \partial v \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J|$$