

Resumen : Diagonalización de matrices

1 Valores propios y vectores propios

Si se cumple que $Av = \lambda v$ (respectivamente $f(v) = v$) entonces v es un **vector propio**, de la matriz A (respectivamente del endomorfismo f), y λ un **valor propio**, de la matriz A (respectivamente del endomorfismo f), asociado a v .

Observación: Sea f un endomorfismo y A la **matriz asociada a f respecto de una base**. Entonces los **valores propios (y los vectores propios)** de f y de A son los mismos. Esto se debe a que $f(v) = Av$ para cualquier vector v .

2 Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz cuadrada A (de tamaño $n \times n$) es $|A - \lambda I|$. Este polinomio es de grado n y sus raíces son precisamente los valores propios de la matriz.

La suma de las multiplicidades $m(\lambda)$ de los valores propios de la matriz es como mucho el tamaño de la matriz.

Los valores propios de una matriz triangular (superior o inferior) son los elementos de la diagonal principal.

Propiedad: Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, y por tanto, los mismos valores propios y las mismas multiplicidades.

Se llama **polinomio característico de un endomorfismo** al de cualquiera de sus matrices asociadas.

3 Subespacios propios

El subespacio propio de la matriz A asociado al valor propio λ es

$$N_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{v \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda I)v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$$

Está formado por todos los vectores propios de la matriz A asociados al valor propio λ , además del vector 0.

Propiedades: Para cada valor propio λ de una matriz cuadrada A de orden n se tiene que:

1. $\ker(A - \lambda I) \neq 0$ (es decir, $\dim(\ker(A - \lambda I)) \geq 1$).
2. $\dim[\ker(A - \lambda I)] \leq m(\lambda)$.
3. $\dim[\ker(A - \lambda I)] = n - r(A - \lambda I)$.

Propiedad: Vectores propios asociados a distintos valores propios son LI; o dicho de otro modo, la suma de los subespacios propios es directa. Esto se traduce en que la unión de bases de cada subespacio propio resulta ser una base de la suma de los subespacios propios.

4 Matrices diagonalizables

Una matriz cuadrada se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal. Un endomorfismo se dice **diagonalizable** si la matriz asociada respecto de alguna base del espacio es una matriz diagonal. En ambos casos la matriz diagonal se llamará **matriz diagonal asociada**, y su **diagonal principal estará formada por los valores propios de la matriz A** .

Condición 1: Una matriz es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio vectorial formada por vectores propios de la matriz.

Cuando tengamos una matriz A diagonalizable tendremos

$$A = PDP^{-1}$$

donde D es una matriz diagonal y P es invertible. A D la llamaremos **matriz diagonal semejante a A** y a P y a su inversa **matrices de paso o matrices cambio de base**.

Condición 2: Una matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si $\mathbb{R}^n$ es la suma (directa) de todos los subespacios propios de la matriz si y sólo si **la suma de las dimensiones de dichos subespacios propios es n** .

La base de vectores propios se puede hallar uniendo bases de cada uno de los subespacios propios de A .

Condición 3: A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. El polinomio característico ϕ_A tiene sólo raíces reales.
2. Para cada valor propio λ de la matriz A se tiene que $\dim[\ker(A - \lambda I)] = m(\lambda)$.

Para un valor propio λ con $m(\lambda) = 1$ se tiene que $\dim[\ker(A - \lambda I)] = 1$.

Condición 4: Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Si A posee n valores propios de multiplicidad 1 en $\mathbb{R}$, entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

5 Aplicaciones de la diagonalización

5.1 Cálculo de potencias de matrices

Si A es una matriz diagonalizable cuya descomposición es

$$A = PDP^{-1}$$

(donde D es la matriz diagonal asociada y P la matriz de paso) entonces se cumple para cada índice natural k que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Además si D es una matriz diagonal con elementos

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

en la diagonal principal, para cada $k = 1, 2, 3, \dots$ se tiene que D^k es también una matriz diagonal, y los elementos de la diagonal principal son

$$\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$$

5.2 Diagonalización de matrices simétricas reales

Si $A = A^t$, de orden n , y consideramos en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar euclídeo. Entonces:

1. A es siempre diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, en particular sus valores propios son todos reales
2. Vectores propios de la matriz asociados a distintos valores propios son ortogonales.
3. Puede encontrarse una base ortogonal (e incluso ortonormal) de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz.

$P^{-1} = P^t \implies P$ se llama matriz ortogonal (sus vectores-fila o sus vectores-columna forman una base ortonormal de espacio $\mathbb{R}^n$). La matriz cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal.

Diagonalización ortogonal de la matriz real simétrica $A \implies A = PDP^{-1}$ donde $P = M_{B \rightarrow C}$ es una matriz ortogonal, pues se puede elegir B una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A (escogiendo en cada subespacio propio una base ortonormal y uniendo dichas bases). Por tanto $P^{-1} = P^t$.