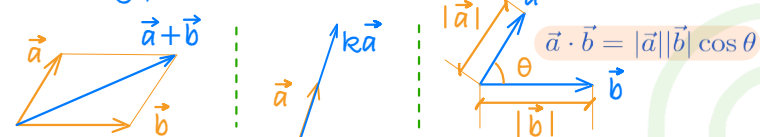


1. Álgebra vectorial

1.1. Espacio vectorial euclideo

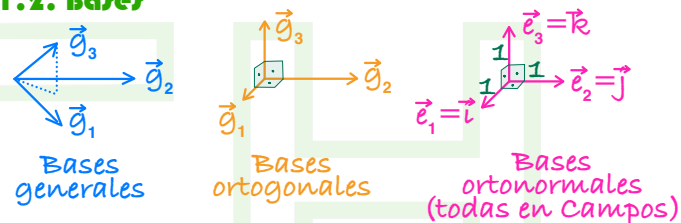
Conjunto de vectores (flechas) con suma, producto por escalar y producto escalar



Proyección de un vector

($\vec{u}$ unitario) $p_{\vec{u}}(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{u}$
 $\vec{p} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}$

1.2. Bases



1.3. Componentes de un vector

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \Leftrightarrow [\vec{v}]_B = (v_x, v_y, v_z)$
 Propiedad: $v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} \Leftrightarrow v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$
 $v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}$
 $v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}$
 Proyecciones de $\vec{v}$ en i, j, k

1.4. Cambio de base

Dos bases ortonormales
 $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
 $\hat{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$
 $C = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B \end{pmatrix}$
 Relación entre las componentes
 $[\vec{v}]_{\hat{B}} = C^T [\vec{v}]_B$
 $[\vec{v}]_B = C [\vec{v}]_{\hat{B}}$

1.5. Operaciones. Producto vectorial

Área del paralelogramo
 Módulo: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$
 Dirección: perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$
 Sentido: Regla de la mano derecha
 Fórmula en base ortonormal $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

1.5. Operaciones. Producto mixto

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
 En valor absoluto, es el volumen del paralelepípedo
 Fórmula en base ortonormal $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
 Propiedad: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$

1.5. Operaciones. Producto escalar de productos vectoriales

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$

1.5. Operaciones. Doble producto vectorial

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$

2. Álgebra tensorial

2.1. Definición de tensor

- Tensor de orden 0: número real, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Tensor de orden 1: vector, $\vec{v} \in V$
- Tensor de orden 2: aplicación lineal de V en V , $\underline{T}$

$\underline{T}: V \rightarrow V$
 $\vec{v} \mapsto \underline{T} \cdot \vec{v}$

$\underline{T} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \underline{T} \cdot \vec{a} + \underline{T} \cdot \vec{b}$
 $\underline{T} \cdot (\alpha \vec{a}) = \alpha (\underline{T} \cdot \vec{a})$

Ejemplos muy importantes:

Tensor identidad, $\underline{1}$: $\underline{1} \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Tensor nulo, $\underline{0}$: $\underline{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Tensor díada, $\vec{a} \otimes \vec{b}$: $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{v} = (\vec{b} \cdot \vec{v}) \vec{a}$

Tensor axial, $\vec{\omega} \times$: $(\vec{\omega} \times) \cdot \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

- Tensor de orden 3: aplicación lineal de V en $T^{(2)}$

2.2. El espacio vectorial de los tensores

Los tensores de orden 2 se pueden sumar entre sí y multiplicar por números (escalares):

Suma: $(\underline{T} + \underline{S}) \cdot \vec{v} = \underline{T} \cdot \vec{v} + \underline{S} \cdot \vec{v}$

Producto por escalar: $(\alpha \underline{T}) \cdot \vec{v} = \alpha (\underline{T} \cdot \vec{v})$

Con estas operaciones, el conjunto de los tensores de orden 2 forma espacio vectorial

2.3. Bases de los tensores

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es base ortonormal de vectores, entonces conjunto de las díadas

$\{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\}$

Es base de los tensores

2.4. Componentes de un tensor

$T = t_{11} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + t_{12} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \dots + t_{33} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \Leftrightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$T = 3 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 15 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \Leftrightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

Propiedad: $t_{ij} = \vec{e}_i \cdot (T \cdot \vec{e}_j)$

Componentes de tensores importantes:

$[O]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$[\vec{a} \otimes \vec{b}]_B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$

$[1]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[\vec{\omega} \times]_B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

2.5. Cambio de base

$[T]_{\hat{B}} = C^T [T]_B C$
 $[T]_B = C [T]_{\hat{B}} C^T$

2.6. Producto contraído

- Definición: $(T \cdot S) \cdot \vec{v} = T \cdot (S \cdot \vec{v})$
- Propiedades:
 - $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{c} \otimes \vec{d}) = (\vec{c} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \otimes \vec{b})$
 - $T \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a(T \cdot \vec{u}) + b(T \cdot \vec{v})$
 - $T \cdot (S \cdot \vec{u}) = (T \cdot S) \cdot \vec{u}$
 - $T \cdot S \neq S \cdot T$
- En componentes: $T = S \cdot \vec{u} \rightarrow [T]_{\vec{e}} = [S]_{\vec{e}} \cdot [\vec{u}]_{\vec{e}}$
- Tabla de multiplicar de tensores:

Factor 2 \ Factor 1	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\vec{c} \otimes \vec{d}$	$\vec{\Omega} \times$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\vec{c} \otimes \vec{d}$	$\vec{\Omega} \times$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\vec{a} \otimes \vec{b}$	$\vec{a} \otimes \vec{b}$	$\underline{0}$	$(\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \otimes \vec{d})$	$\vec{a} \otimes (\vec{b} \times \vec{c})$
$\vec{\omega} \times$	$\vec{\omega} \times$	$\underline{0}$	$(\vec{\omega} \times \vec{c}) \otimes \vec{d}$	$(\vec{\Omega} \times \vec{\omega}) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}) \underline{1}$

$T \cdot S$ es la composición de T y S

3. Estudio geométrico de tensores de orden 2

3.1. Fórmulas de tensores geométricos

Proyección sobre recta	Proyección sobre plano	Rotación de ángulo θ
$P = \vec{e} \otimes \vec{e}$	$P^+ = \underline{1} - \vec{e} \otimes \vec{e}$	$R = \cos \theta \underline{1} + (1 - \cos \theta) \vec{e} \otimes \vec{e} + \sin \theta \vec{e} \times$
$S = 2\vec{e} \otimes \vec{e} - \underline{1}$	$H = \underline{1} - 2\vec{e} \otimes \vec{e}$	$(\vec{e} \text{ unitario en todos los casos})$
$\text{Simetría resp. Recta}$	$\text{Simetría resp. Plano}$	

3.2. Autovalores y autovectores

- Autovalor (valor propio o valor principal)
 - Dado T , λ es autovalor de T si existe $\vec{v} \neq 0$ tal que $T \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$.
- Autovector: dado un autovalor λ , $\vec{v}$ es auto vector de λ si $T \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$
- Propiedad: el conjunto de los todos los vectores asociados a un mismo λ forma una recta, un plano o todo el espacio y se llama subespacio propio asociado a λ , S_λ
- Cálculo en componentes
 - Autovalores: $|[T]_{\vec{e}} - \lambda I| = 0$ Da igual la base
 - Autovectores: $([T]_{\vec{e}} - \lambda I)X = 0$ Ecs. de S_λ

3.3. Trazo y determinante

- | Trazo | Determinante |
|---|--|
| Definición: $\text{Tra}(T) = \text{tra}([T]_{\vec{e}})$ | Definición: $\text{Det}(T) = \det([T]_{\vec{e}})$ |
| Propiedades: <ul style="list-style-type: none"> $\text{Tra}(aT + bS) = a \text{Tra} T + b \text{Tra} S$ $\text{Tra}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ $\text{Tra}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ | Propiedades: <ul style="list-style-type: none"> $\text{Det}(aT) = a^3 \text{Det} T$ $\text{Det}(T \cdot S) = \text{Det} T \cdot \text{Det} S$ $\text{Det}(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ Def.: T singular si $\exists \vec{v} \neq 0$ tal que $T \cdot \vec{v} = \vec{0}$ ($\leftrightarrow \lambda = 0 \leftrightarrow \text{Det} T = 0$) |

3.4. Tensor traspuesto e inverso

- | Tensor traspuesto | Tensor inverso |
|---|--|
| Definición: Dado T , T^T : $\vec{u} \cdot T \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot T^T \cdot \vec{u} \forall \vec{u}, \vec{v}$ | Definición: Dado T no singular (regular), T^{-1} es el que cumple $T \cdot T^{-1} = \underline{1}$ |
| Propiedades: <ul style="list-style-type: none"> $(aT + bS)^T = aT^T + bS^T$ $(T \cdot S)^T = S^T \cdot T^T$ $(T^T)^T = T$ | Propiedades: <ul style="list-style-type: none"> $(aT)^{-1} = a^{-1} T^{-1}$ $(T \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot T^{-1}$ $(T^{-1})^{-1} = T$ |
| En componentes: $[T^T]_{\vec{e}} = [T]_{\vec{e}}^T$ | En comp.: $[T^{-1}]_{\vec{e}} = [T]_{\vec{e}}^{-1}$ |

Autovalores de tensores geométricos

Proyección sobre recta	Proyección sobre plano
Simetría resp. recta	Simetría resp. Plano
Rotación	

3.5. Tensor simétrico y antisimétrico

Tensor simétrico

- Definición: T simétrico si $T^T = T$
- En comp.: T sim. $\leftrightarrow [T]_{\vec{e}}$ simétrica
- Prop.: T simétrico $\leftrightarrow$ existe base formada por autovectores de T (base propia o espectral)

Subespacios propios

Tensor antisimétrico

- Definición: T antisimétrico si $T^T = -T$
- En comp.: T antisim. $\leftrightarrow [T]_{\vec{e}}$ antisimétrica
- Prop.: T antisimétrico $\leftrightarrow T = \vec{\omega} \times$

Descomposición

Todo tensor se descompone de forma única en P . Simétrica y antisimétrica

$$T = T_s + T_a$$

$$T_s = \frac{1}{2} (T + T^T)$$

$$T_a = \frac{1}{2} (T - T^T)$$

3.6. Tensor ortogonal

- Definición: T ortogonal si $T \cdot T^T = \underline{1}$
- Propiedades:
 - T ortogonal $\leftrightarrow$ conserva P . Escalar
 - T ortogonal $\rightarrow$ conserva módulos $|\vec{a}| = |T \cdot \vec{a}|$
 - T ortogonal $\rightarrow$ conserva ángulos $(\vec{a}, \vec{b}) = (T \cdot \vec{a}, T \cdot \vec{b})$
 - T ortogonal $\rightarrow \det T = 1$ o -1
 - T ortogonal $\rightarrow \lambda = 1$ y/o -1
 - T rotación $\leftrightarrow T$ ortogonal y $\det T = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (T \cdot \vec{a}) \cdot (T \cdot \vec{b})$
 $|\vec{a}| = |T \cdot \vec{a}|$
 $(\vec{a}, \vec{b}) = (T \cdot \vec{a}, T \cdot \vec{b})$