

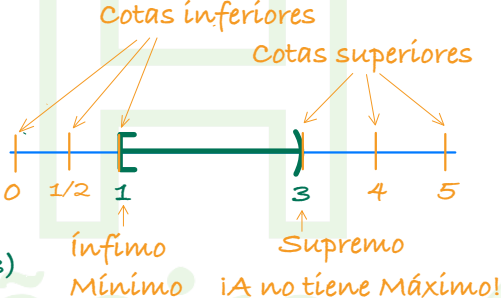
Números reales. clasificación
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \right\}$
 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
 $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

Números reales. propiedad
 $p, q \in \mathbb{Q} \rightarrow p + q, p - q, p \cdot q, p/q (q \neq 0) \in \mathbb{Q}$
 $p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{I} \rightarrow p + q, p - q, p \cdot q, p/q \in \mathbb{I}$
 $p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{I} \rightarrow p + q, p - q, p \cdot q, p/q \in ?$

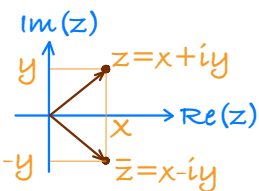
Valor absoluto
 $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ejemplo: Si $p = 1 + \sqrt{2}$ y $q = 1 - \sqrt{2}$
Entonces $\begin{cases} p + q = 2 \in \mathbb{Q} \\ p - q = 2\sqrt{2} \in \mathbb{I} \\ p \cdot q = 1^2 - \sqrt{2}^2 = -1 \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Cotas, supremo, ínfimo, máximo y mínimo
Dado $A \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $k \geq a \ \forall a \in A$
Dado $A \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A si $k \leq a \ \forall a \in A$
Dado $A \subset \mathbb{R}$, se llama supremo de A a la menor de las cotas superiores
Dado $A \subset \mathbb{R}$, se llama ínfimo de A a la mayor de las cotas inferiores
Dado $A \subset \mathbb{R}, M \in A$ es Máximo de A si $M \geq a \ \forall a \in A$
Dado $A \subset \mathbb{R}, m \in A$ es mínimo de A si $m \leq a \ \forall a \in A$



Números complejos. Definiciones.
unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$
P. real
P. imaginaria
Número complejo $z = x + iy$
Complejo conjugado de z $\bar{z} = x - iy$
Forma binómica

Plano complejo


Operaciones
 $z = 1 + 2i$
 $w = 3 + i$
Suma $\rightarrow z + w = (1 + 2i) + (3 + i) = 4 + 3i$
Resta $\rightarrow z - w = (1 + 2i) - (3 + i) = -2 + i$
Producto $\rightarrow z \cdot w = (1 + 2i) \cdot (3 + i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot i = 1 + 7i$
Cociente $\rightarrow \frac{z}{w} = \frac{1 + 2i}{3 + i} = \frac{(1 + 2i) \cdot (3 - i)}{(3 + i) \cdot (3 - i)} = \frac{3 - i + 6i - 2i^2}{3^2 - i^2} = \frac{5 + 5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Módulo y argumento de un número complejo
Módulo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argumento: θ
 $\begin{cases} \text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{cos } \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$
Cualquier θ tal que
En la práctica: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
Y elegimos el ángulo correcto en la figura
Argumento principal: $\theta_p \in (-\pi, \pi]$

Forma exponencial de un número complejo
Fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$
Forma exponencial: $z = \rho e^{i\theta}$
De exponencial a binómica usamos la fórmula de Euler:
 $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \text{sen } \theta) = \rho \cos \theta + i \rho \text{sen } \theta = x + iy$
De binómica a exponencial calculamos módulo y el ángulo
 $z = x + iy \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo } \rho \\ \text{Ángulo } \theta \end{cases} \rightarrow z = \rho e^{i\theta}$
En Resumen: $\text{Bin} \xleftrightarrow{\rho \text{ y } \theta} \text{Exp}$

Operaciones en exponencial
 $z \cdot w = (12e^{i\pi/2}) \cdot (2e^{i\pi/4}) = 24e^{i3\pi/4}$
 $w^3 = (2e^{i\pi/4})^3 = 8e^{i3\pi/4}$
 $\frac{z}{w} = \frac{12e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/4}} = 6e^{i\pi/4}$

Raíces n-ésimas
Raíz real
 $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
En cada raíz el ángulo aumenta $2\pi/n$
Las N raíces enésimas de un número complejo forman los N vértices de un polígono regular de N lados centrado en el origen

Polinomios complejos
 $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$
♦ Un polinomio de grado N tiene exactamente N raíces
♦ Si $a_i \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz, entonces $\bar{z}$ también lo es